



清华大学
Tsinghua University

向量空间概念的微课和思考

杨晶 清华大学 数学科学系

2016年12月3日 福建·福州



内容提要

- 参加微课大赛的过程回顾
- 课程方案设计中的想法
- 几点思考和建议

(一)、参加微课大赛过程回顾

“第二届（2016）全国高校数学微课程教学设计竞赛”

- **2016年4月, 北京地区报名, 培训**
- **2016年5月, 选题, 准备材料, 录制视频, 提交**
- **2016年7月, 北京赛区, 华北赛区获奖**
- **2016年8月, 参加全国比赛, 长春. 获一等奖**
- **2016年11月, 全国高校数学课程论坛, 颁奖, 展示汇报**

(二)、课程方案设计中的想法

2.1 课程基本定位

- **课程名称：线性代数**
- **课程类型：公共基础课**
- **授课对象：清华大学, 非数学类理工科一年级本科生**
- **微课时间：15分钟左右**
- **基本要求：讲清楚一个完整的知识点, 或知识块**

2.1 课程基本定位

● 前后文分析：

《线性代数》课程的前三章，分别介绍了行列式、线性方程组和矩阵，主要偏重具体操作和计算. 进入第四章向量空间后，开始以理论推导为主，将建立一套新的形式化的语言. 本讲的内容是第四章的开篇，是从具体操作到抽象理论与形式化演绎的第一步，是学好《线性代数》课程的关键.

向量组的线性相关性是一套形式化的语言，通过这套语言，可从更深的层面解释行列式、线性方程组和矩阵之间的本质联系，从而是《线性代数》教学的重点，也是难点. 另一方面，向量空间又是将来要介绍的更抽象的线性空间的具体例子，从而是《线性代数》教学中承上启下的重要环节.

2.2 课程方案设计想法之一

● 运用“学习迁移”的教育心理学规律来设计教学过程

- 学习迁移是教育心理学中的重要问题. 基本观点是: 学习者学习新的知识和技能不是孤立的, 它会受到学习者已有知识经验的影响, 甚至要影响到今后的学习和应用 (《教育心理学》, 高明明、卢强编著, 北京出版社, 2007 年第2 版).
- 学习迁移可以划分为**正迁移** (已有经验和知识对新学习起促进作用) 和**负迁移** (已有经验和知识对新学习起干扰作用).
- “小青蛙与小鱼”的故事
- 骑自行车, 骑摩托车, 骑三轮车之间的关系

● 运用“学习迁移”的教育心理学规律来设计教学过程

- 二维三维空间中的几何常识正是我们认知高维空间的“**负迁移**”因素，为此，本讲开篇用了思想实验的方式，采用莫比乌斯带做类比，充分说明从低维空间认知高维空间的困难性。
- 对于向量的相等关系，以及向量运算的定义，首先通过例子发现向量是特殊的矩阵，从而利用已知的矩阵知识，“**正迁移**”到向量中来，使得学生更加容易接受，包括向量的线性运算的8条性质，也不需再验证，因为在第三章矩阵代数中已经验证过了。



2.3 课程方案设计想法之二

- 讲清动机与背景, 使每一个新知识点都是自然引入, 而非突兀地给出.
- 《线性代数》是一门形式化专门化的数学课程. 其中很多概念和方法都经过高度的抽象与简化, 高度概括性的同时也高度抽象. 传统教学中很多概念的介绍都脱离了知识产生的背景和动机点, 从而让学生觉得很不自在很突兀. 例如: 一般行列式的定义, 矩阵乘法的规定, 线性空间与线性映射的引入等等. 概念引入的诸多历史沉淀在教材中却是2-3行的精炼描述, 抹杀了其归纳总结过程中思维的火花.
- 多年来, 对《线性代数》考题的分析中, 我们发现: 学生计算题的得分率明显高于证明题, 学生中普遍存在害怕证明题的心理; 普遍觉得《线性代数》甚至比《微积分》更枯燥, 更难学.

2.3 课程方案设计想法之二

- **讲清动机与背景, 使每一个新知识点都是自然引入, 而非突兀地给出.**
- 学生害怕理论证明, 实际上是没有真正理解理论. 表面上学过所有知识点, 但缺乏对知识点的本质的掌握. 如何从思维的层面总结 n 维向量空间定义中所蕴涵的创新点具有很大的挑战. 而由于学时限制等原因, 传统的教学方式, 往往过于平铺直叙, 上来直接讲规定给定义, 给完定义列性质, 列完性质讲定理. 授课模式过于单一, 也造成了数学课很枯燥的结果.
- 本讲中的五个定义: n 维向量, 向量相等, 向量的运算, n 维向量空间, 子空间. 每一个新概念出现的之前, 都做了相应的铺垫和准备.

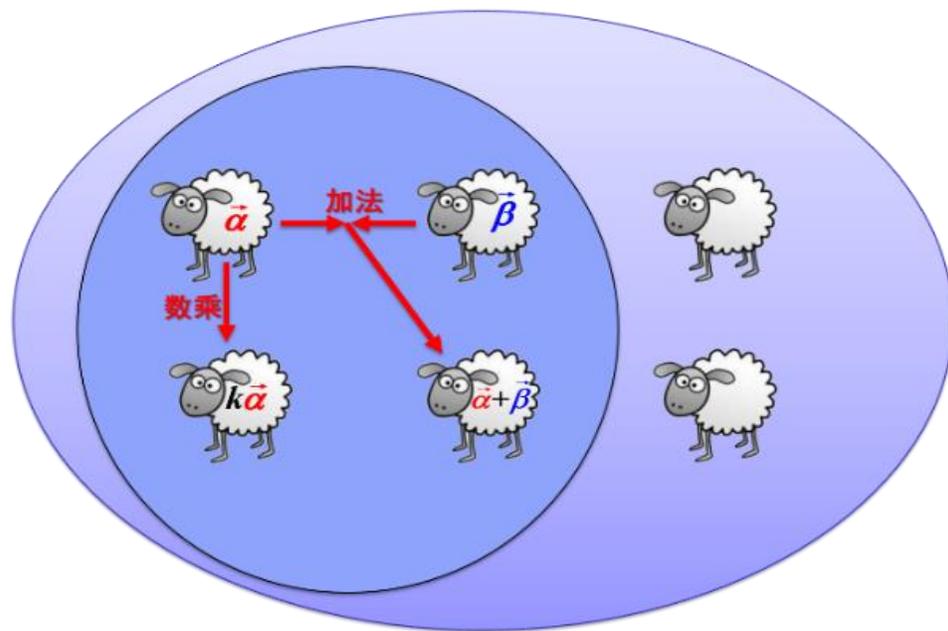
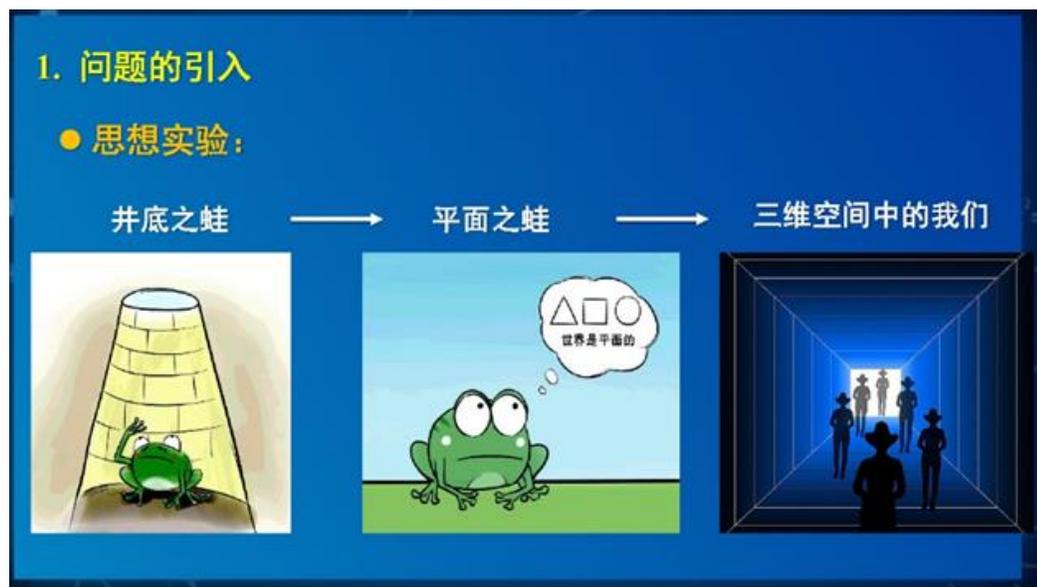
2.3 课程方案设计想法之二

- **讲清动机与背景, 使每一个新知识点都是自然引入, 而非突兀地给出.**

教学理念: 美国著名教育家约翰·加德纳说过, “很多教师只给学生看知识园地里采摘下来的缤纷花朵, 而不给学生看那束呈现在眼前芬芳美丽的花朵的种植、除草、施肥和修剪的整个过程”. 教学中不仅要教知识和概念, 更重要的是培养学生发现概念、探究知识的思维方式和学习方法.

2.4 课程方案设计想法之三

- 在抽象思维的讲述中加入形象思维的元素。
- 苏联数学家Goppa（戈帕码的发明人）提到“无论是多么高深和抽象的数学，都可以在通信中看到它的影子” ..



- 创新性地加入了以参赛教师为原型的卡通漫画形象，拉近了与青年学生的距离.



- 教具的使用，真实可见地在三维空间中扭曲得到莫比乌斯带，并利用平面之蛙“越界”的现象，引导学生类比地去思考高维空间的情况.



不同的路灯



不同的亭台

教学理念：“抽象”是一把双刃剑，高度的抽象是为了高度的概括性；然而高度抽象会带来认知的困难与学习主动性的破坏。在“抽象”与“形象”之间找到平衡点，让数学既能深刻，又能变得通俗好玩起来。

2.5 课程方案设计想法之四

- **注重数学与世界的广泛联系, 注重数学文化.**
 - 南开大学顾沛教授认为, “从狭义上说, 数学文化即数学的思想、精神、方法、观点、语言及其的形成和发展过程; 从广义上说, 除了狭义的内容外, 数学文化还包括数学家、数学史、数学美、数学教育、数学发展中的人文成分以及数学与各种文化的关系.”
 - 在本讲中, 我们不断地鼓励同学们发散思维, 认识数学与其他学科, 其他领域的联系, 如: **数学与天文物理, 数学与赫拉克利特以及爱菲斯学派的哲学, 数学与摄影文化, 数学与电影文化等.**

- 注重数学与世界的广泛联系, 注重数学文化.
- 特别是用数学方式解释赫拉克利特的哲学命题, 并进而用此观点来鉴赏延时摄影作品的过程, 目的是让同学们在学习数学知识的同时, 也能体会到数学的实用性, 数学的广泛性与数学的美.

例2 古希腊哲学家赫拉克利特的哲学命题
“人不能两次踏进同一条河流!”



数学解释:

在4维空间中, 若 $t_1 \neq t_2$, 则向量
 $(t_1, x, y, z) \neq (t_2, x, y, z)$.

举一反三:



不同的路灯



不同的亭台

- 注重数学与世界的广泛联系, 注重数学文化.
- 热门烧脑科幻电影《星际穿越》片花的穿插, 很好地吸引了学生的注意力与求知欲.



例2-续 赫拉克利特的学生克拉底鲁 (Kratylos) 进一步又提出了一个哲学命题:
“人一次也不能踏进同一条河流!”

思考: 如何用数学观点来解释这一命题?

提示: 考虑 (t, x, y, z) 与 $(t + \varepsilon, x, y, z)$,
其中 $\varepsilon > 0$ 为任意小的实数.



教学理念: 古希腊哲学家数学家毕达哥拉斯曾说: “万物皆数”, 世间万物的运行都蕴含着数学原理, 数学是一门自然科学, 也是一种文化, 数学如果脱离了其丰富的文化基础, 就会被简化成一系列的技巧, 它的形象也就被完全歪曲了. 真正好的数学课教学过程要带领学生认知数学, 更要引导学生认知世界.

(三)、几点建议和思考

- 微课设计大赛, 重在“设计”
- 视频录制: 写“脚本”, 熟能生巧
- 微课, 慕课与过去的公开课, 电教课的区别
—— “大师专门给我讲课!”
- 数学微课, 慕课的特点: 手写推导, 手写批注
- 案例分析课大有可为!!!
- 思考: (1). 比赛和实际上课有何关系?
(2). 32学时的<线性代数>能讲什么?

感谢您的聆听!

